MATEMÁTICAS

ÁREA: BÁSICA CLAVE DE LA ASIGNATURA: LA 102

OBJETIVO(S) GENERAL(ES) DE LA ASIGNATURA:

Al término del curso, el alumno analizará los principios de las matemáticas; aplicará los mismos como herramientas para operar en los comportamientos estadísticos, económicos y en particular los administrativos, dentro de las organizaciones.

1.3 Los exponentes

Sea un número real x . Si se multiplica por sí mismo se obtiene x · x . Si a este resultado se multiplica nuevamente por x resulta x· x· x. De manera sucesiva, si x se multiplica por si misma n veces, se obtiene: x· x· x· · · x (n veces)

Para simplificar este tipo de expresiones se acostumbra utilizar una notación abreviada, tal que:

$$x \cdot x = x^2$$
$$x \cdot x \cdot x = x^3$$
$$x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4$$

y en general

$$x \cdot x \cdot x \cdots x = x^n$$

Donde x es llamada **base** y el número n escrito arriba y a su derecha, es llamado **exponente**. El exponente indica el número de veces que la base se toma como factor.

1.3.1 Sus leyes

i. Primera ley

Sea un número real x diferente de cero y dos números naturales n y m también diferentes de cero. Entonces se cumple que:

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

Ejemplos

- $x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$
- $4a^2 \cdot 5a^6 = 20a^{2+6} = 20a^8$

ii. Segunda ley

Sea un número real x diferente de cero y dos números naturales n y m también diferentes de cero. Entonces, se cumple que:

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

Al dividir potencias con la misma base, se mantiene la base y se restan los exponentes.
Ejemplos

- $\frac{x^7}{x^4} = x^{7-4} = x^3$
- $\frac{10a^7}{-5a^4} = -2a^{7-4} = -2a^3$

iii. Tercera ley

Sea un número real x diferente de cero. Si en la ley anterior, se hace que n=m se tiene que:

$$\frac{x^n}{x^n} = x^{n-n} = x^0$$

Pero al dividir una expresión por si misma el resultado es la unidad, así que se cumple que:

$$x^0 = 1$$

Cualquier base diferente de cero elevada a la potencia cero es uno.

iv. Cuarta ley

Sea un número real x diferente de cero y dos números naturales n y m también diferentes de cero. Entonces, se cumple que:

$$(x^n)^m = x^{n \cdot m}$$

Al elevar una potencia a otra potencia, se mantiene la base y se multiplican los exponentes.

Ejemplos

- $(x^3)^2 = x^{3 \cdot 2} = x^6$
- $(a^4)^5 = x^{4 \cdot 5} = x^{20}$

v. Quinta ley

Sean dos números reales x y y diferentes de cero y un número natural n también diferente de cero. Entonces, se cumple que:

$$(xy)^n = x^n y^n$$

El producto de uno o más factores que se elevan todos a la vez a un exponente es igual a un producto de cada factor elevado al exponente.

Ejemplos

- $(2a^2)^3 = 2^2 a^{2 \cdot 3} = 4a^6$
- $(-3k^4)^3 = (-3)^3 (k^4)^3 = -27k^{12}$

vi. **Sexta ley**

Sean dos números reales x y y diferentes de cero y un número natural n también diferente de cero. Entonces, se cumple que:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}, \qquad y \neq 0$$

El cociente de uno o más factores que se elevan todos a la vez a un exponente es igual al cociente de cada factor elevado al exponente.

- $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$
- $\left(\frac{ab}{cd}\right)^3 = \frac{a^3b^3}{c^3d^3}$

vii. **Séptima ley**

Sea un número real x diferente de cero. Si n es un número entero diferente de cero, por las leyes anteriores se cumple que:

$$\frac{x^n}{x^n} = x^{n-n} = x^0 = x^n \cdot x^{-n} = 1$$

Pero el recíproco del número real x^n se define como $\frac{1}{x^n}$, ya que cumple con $\frac{1}{x^n} \cdot x^n = 1$

Comparando las expresiones, se llega a:

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

Elevar una expresión a una potencia entera negativa, equivale a formar una fracción con numerador uno y cuyo denominador es la misma expresión pero con la potencia positiva.

1.4 Logaritmos

Sea la expresión $a^b = x,\ con\ a > 0\ y\ a \neq 1$

Se denomina **logaritmo** base a del número x al exponente b al que hay que elevar la base para obtener dicho número. Es decir:

$$log_a x = b$$

que se lee como "el logaritmo base a del número x es b ” y como se puede apreciar, un logaritmo representa un exponente.

La constante a es un número real positivo distinto de uno, y se denomina **base del logaritmo**. La potencia a^b para cualquier valor real de b solo tiene sentido si a > 0 .

Ejemplos

- $5^2 = 25 \Rightarrow log_5 25 = 2$
- $3^4 = 81 \Rightarrow log_3 81 = 4$

Logaritmos Decimales:

Se llaman logaritmos decimales a los logaritmos que tienen por base el número diez. Al ser muy habituales es frecuente no escribir la base:

$$log_{10}x = \log x$$

Logaritmos Naturales:

Se llaman logaritmos naturales (también llamados neperianos) a los logaritmos que tienen por base el número irracional e y se denotan como ln

$$log_e x = \ln x$$

Propiedades de los logaritmos

1) $log_a 1 = 0$
2) $log_a a = 1$
3) $log_a (u \cdot v) = log_a u + log_a v$
4) $log_a \left(\frac{u}{v}\right) = log_a u - log_a v$
5) $log_a u^n = n \cdot log_a u$
6) $log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} log_a u$

1.5 Exponenciales

Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, se llama función exponencial de base a y se denota Exp_a, a la función definida por: $Exp_a: \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$

$$x \to a^x$$

Observaciones

- De la definición anterior se tiene que $Exp_a(x) = a^x$
- La restricción a>0, es indispensable, pues si a=0 o a<0, se presentarían algunas expresiones no definidas en $\mathbb{R}$, tales como $0^{-1}, (-2)^{1/2}, 0^0$, etc.
- EL caso a=1 se ha excluido debido a que en este caso se tendría $1^x = 1$, para cada $x \in \mathbb{R}$, o sea que 1^xes una función constante.

Ejemplos

- La función f definida por $f(x) = 2^x$es la función exponencial de base 2.
- La función g definida por $g(x) = (\frac{1}{2})^x$es la función exponencial de base ½ .

1.6 Referencias

Astorga, Alcides (1984) La Función Exponencial y la Función Logarítmica. Instituto Tecnológico de Costa Rica. Costa Rica.

Becerra, Manuel. (2011). Ley de exponentes y logaritmos. Facultad de Contaduría y Administración. UNAM. México, Distrito Federal.

Rico, Carlos. (2012). Álgebra. RED TERCER MILENIO S.C. Estado de México, México.